УДК: 517.955.4, 517.983

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ ИТЕРАЦИЯМИ ФУНКЦИЙ ЧЕРНОВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

О. Е. Галкин, И. Д. Ремизов

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (Россия, Нижний Новгород)

E-mail: olegegalkin@ya.ru; ivremizov@yandex.ru

В докладе предложена принадлежащая авторам доклада теорема (бывшая ранее гипотезой второго автора), дающая практический способ оценки скорости сходимости черновских аппроксимаций к полугруппе операторов. Так как эти полугруппы дают решение задачи Коши для линейных эволюционных уравнений, то тем самым получен метод доказательства того, что так называемые быстро сходящиеся черновские аппроксимации действительно имеют заявляемую высокую скорость сходимости.

Ключевые слова: Однопараметрическая полугруппа операторов, аппроксимация, теорема Чернова, касание по Чернову, оценка на скорость сходимости

APPROXIMATION OF SEMIGROUPS OF OPERATORS BY ITERATIONS OF HIGH-ORDER CHERNOV FUNCTIONS

Oleg E. Galkin, Ivan D. Remizov

National research University Higher school of Economics (Russia, Nizhny Novgorod)

We propose a theorem (which was previously a conjecture of the second author), which gives a practical way of estimating the rate of convergence of Chernoff approximations to a semigroup of operators. Since these semigroups give the solution to the Cauchy problem for linear evolutionary equations, a method has been obtained to prove that the so-called rapidly converging Chernoff approximations do indeed have the stated high convergence rate.

Keywords: One-parameter semigroup of operators, approximation, Chernoff theorem, Chernoff tangency, estimation on speed of convergence.

Настоящее сообщение посвящено C_0-полугруппам операторов в банаховом пространстве, в качестве источника опеределений и фактов в этой области можно использовать, например, книги [1, 6]. Нас будет интересовать приближение (аппроксимация) операторов из этих полугрупп с помощью конструкций, основанных на теореме Чернова [5], обзор значительной части этой уже довольно обширной тематики можно найти в статье [4]. Более того, нас будет интересовать вопрос о скорости сходимости таких аппроксимаций; это очень молодая область исследований, стремительно набирающая популярность [7, 3, 2].

Пусть X — вещественное или комплексное банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — множество линейных ограниченных операторов в X. Пусть, кроме того, линейный оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ является генератором C_0–полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(X)$ линейных ограниченных операторов, действующих в X.

Функцией Чернова (***порядка*** 1) для полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ мы называем операторнозначную функцию $S\colon [0,T] \to \mathcal{L}(X)$ (где T — некоторое положительное число), удовлетворяющую условиям теоремы Чернова (см. [1, 6, 5]). В частности, функция Чернова должна при всех x из существенной области определения оператора A удовлетворять условию касания (порядка 1): $G(t)x = x + tAx + o(t)$ при $t \to +0$. Теорема Чернова утверждает, что с помощью итераций функции Чернова можно аппроксимировать полугруппу $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ следующим образом: $\lim_{n\to\infty} \|e^{tA}x - [S(t/n)]^n x\| = 0$ для любых $t > 0$ и $x \in X$.

Под ***функцией Чернова*** (***порядка*** $m > 1$) для полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ мы понимаем операторнозначную функцию $S\colon [0,T] \to \mathcal{L}(X)$, которая при всех $x \in D(A^m)$ удовлетворяет условию касания порядка m: $G(t)x = x + tAx + \ldots + t^m/m!\, A^m x + o(t^m)$ при $t \to +0$, а также еще некоторым условиям, которые будут видны из нижеследующей теоремы. Условие касания порядка $m > 1$ было введено в надежде [8], что при его выполнении величина $\|e^{tA}x - [S(t/n)]^n x\|$ при $n \to \infty$ будет стремиться к нулю быстрее (хотя бы для некоторых x). Наша основная теорема показывает, что эта надежда оправдалась:

Теорема. *Пусть C_0-полугруппа $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(A, D(A))$ в банаховом пространстве X для некоторых $M_1 \geq 1$ и $w_1 \geq 0$ удовлетворяет условию $\|e^{tA}\| \leqslant M_1 e^{w_1 t}$ для всех $t \in [0,T]$. Пусть, кроме того, для отображения $S\colon [0,T] \to \mathcal{L}(X)$ при некотором натуральном m и любых $x \in D(A^{m+1}) \subset X$, $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$\left\| S(t)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k x}{k!} \right\| \leqslant \frac{C_m(t) t^{m+1}}{(m+1)!} \|A^{m+1}x\|,$$

где $C_m(t)$ — положительная константа при каждом $t \in (0,T]$. Предположим также, что имеет место хотя бы одно из условий а), б):

а) существует $w_2 \geq 0$, такое что $\|S(t)\| \leq e^{w_2 t}$ при всех $t \in [0,T]$;

б) существуют $w_2 \geq 0$ и $M_2 \geq 1$, такие что $\|S(t)^k\| \leq M_2 e^{k w_2 t}$ при всех $t \in [0,T]$ и натуральных k.

Тогда:

1) Условие а) влечет условие б) с M_2=1.

2) Принимая во внимание 1), при $w_1 \neq w_2$ для любых $t \in [0,T]$ и натуральных n будет выполняться оценка

$$\|S(t/n)^n x - e^{tA}x\| \leqslant M_1 M_2 (C_m(t/n) + M_1 e^{w_1 t/n}) \|A^{m+1}x\| \frac{t^{m+1}(e^{w_2 t} - e^{w_1 t})}{n^{m+1}(m+1)! e^{w_1 t/n}}.$$

3) Принимая во внимание 1), при $w_1 = w_2 = w$ для любых $t \in [0,T]$ и натуральных n будет выполняться оценка

$$\|S(t/n)^n x - e^{tA}x\| \leq (C_m(t/n) + M_1 e^{wt/n}) \frac{M_1 M_2 t^{m+1} e^{wt}}{n^m (m+1)!} \|A^{m+1}x\|.$$

Пример. Пусть $\|e^{tA}\| \leq e^t$, $\|S(t)\| \leq e^t$, $S(t)x = x + tAx + \frac{1}{2}t^2A^2x + o(t^2)$ при $t \to 0$, причем $\|S(t)x - x - tAx - \frac{1}{2}t^2A^2x\| \leq Ct^{2+\varepsilon}\|A^3x\|$ для некоторых $\varepsilon \in (0,1]$ и $C > 0$ при всех $t \in [0,1]$. Тогда $m = 2$, $C_m(t) = 6Ct^{\varepsilon-1}$, $M_1 = M_2 = w_1 = w_2 = 1$, и пункт 3) представленной выше теоремы утверждает, что для любых $t \in [0,1]$, $x \in D(A^3)$ и каждого натурального n справедлива оценка

$$\|S(t/n)^n x - e^{tA}x\| \leq \left(6C\left(\frac{n}{t}\right)^{1-\varepsilon} + e^{t/n}\right) \frac{t^3 e^t}{6n^2} \|A^3x\| = C\frac{t^{3-\varepsilon}e^t}{n^{2-\varepsilon}} \|A^3x\| + o\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Список литературы

[1] Богачев В.И. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. / В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 728 с.

[2] Веденин А.В. Скорость сходимости черновских аппроксимаций решений эволюционных уравнений. / А.В. Веденин, Воеводкин В.С., В.Д. Галкин, Е.Ю. Каратецкая, И.Д. Ремизов. // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 3. – 463–468

[3] Batty C. A Besov algebra calculus for generators of operator semigroups and related norm-estimates. / C. Batty, A. Gomilko, Yu. Tomilov // arXiv:1810.11799 [math.FA] – 2019.

[4] Butko Ya.A. The Method of Chernoff Approximation. / Ya.A. Butko. // In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds) Semigroups of Operators — Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – V. 325. – P. 19-46.

[5] Chernoff P.R. Note on product formulas for operator semigroups. / P.R. Chernoff. // J. Functional Analysis. – 1968. – V. 2, № 2. – P. 238-242.

[6] Engel K.-J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. / K.-J. Engel, R. Nagel. – New-York: Springer-Verlag, 2000. – 589 p.

[7] Neidhardt H. Operator-Norm Convergence of the Trotter Product Formula on Hilbert and Banach Spaces: A Short Survey. / H. Neidhardt, A. Stephan, V. Zagrebnov. // arXiv:2002.04483 [math.FA] – 2020.

[8] Remizov I.D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff's product formula. / I.D. Remizov. // International Conference “Shilnikov Workshop-2018”, book of Abstracts. – Nizhny Novgorod: UNN, 2018. – P. 38.