Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Кафедра Высшей математики

Программа дисциплины «Теория оптимального управления»

Автор программы:

Шнурков Петр Викторович

Одобрена на заседании кафедры «___» _______________ 2012 г.
Зав. кафедрой Четвериков В.М.

Рекомендована секцией УМС «___» _______________ 2012 г.

Утверждена УС факультета «___» _______________ 2012 г.

Москва 2012

Оглавление

Пояснительная записка к курсу «Теория оптимального управления»

Введение.

В современной математической науке понятие исследования операций определяется следующим образом: «Исследование операций – научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Важность количественного фактора в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций позволяют определить исследование операций как теорию принятия оптимальных решений» (Большой энциклопедический словарь «Математика», научное издательство «Большая Российская Энциклопедия», Москва, 1998, стр. 248).

Математически проблема прияния оптимального решения чаще всего может быть выражена как задача оптимизации с ограничениями. Продолжим цитирование статьи «Исследование операций» из Большого энциклопедического словаря «Математика»: «Теоретически мыслимы задачи исследования операций с любыми множествами допустимых решений и с весьма произвольными критериями оптимальности. Последние могут иметь вид требований о максимизации (или минимизации) значений одной или нескольких числовых функций, значения которых выражают меру (степень) осуществления целей соответствующим допустимым решением. Каждая такая функция обычно называется целевой функцией. Если такая функция одна, то говорят о задаче математического программирования» (там же, стр. 249)

Теория математического программирования так же является весьма сложной и многообразной. «В математическом программировании чаще других рассматриваются задачи, в которых множество допустимых решений X есть подмножество конечномерного евклидова пространства E^n. Если при этом X – выпуклый многогранник с конечным числом вершин, а целевая функция f линейна, то имеют дело с задачами линейного программирования; если X – произвольно выпуклое множество, а f – выпуклая функция, подвергаемая минимизации, то имеют дело с задачей выпуклого программирования и т.д. Множество допустимых значений X может быть также подмножеством функционального пространства, и формально вариационное исчисление, а также круг вопросов, связанный с принципом максимума Понтрягина, могут быть также отнесены к оптимальному программированию. Задачи, в которых всякое допустимое решение конструируется в результате некоторого многошагового процесса, составляют предмет динамического программирования» (там же, стр. 250)

Таким образом, теория исследования операций является широкой и разнообразной областью современной математики. Для того, чтобы создать фундаментальный учебный курс в данной области, необходима общая концепция, которая должна лежать в его основе.

При разработке такой концепции я исходил из следующих основополагающих условий:

1. Предлагаемый курс должен быть фундаментальным и отражать наиболее общие и принципиальные результаты теории оптимизации.
2. Определяющим условием является также объем курса (лекционных семинарских и других видов занятий)

В связи с последним условием отмечу, что руководством факультета прикладной математики и математической экономики МИЭМ мне была предоставлена возможность прочитать курс «Математические методы и модели исследования операций» (6 и 7 семестры, 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю в течение обоих семестров), а также курс «Теория оптимального управления» (7 семестр, 2 часа лекций в неделю, семинарских занятий нет). Оба указанных курса предназначались для потока студентов, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике».

Исходя из указанных условий и того факта, что общая теория оптимизации в конечномерном евклидовом пространстве и теория линейного программирования читаются студентам данной специальности ранее, в течение 5 семестра, я предложил следующую концепцию обучения студентов по данному направлению.

Целесообразно рассматривать учебные курсы «Математические методы и модели исследования операций» (6 и 7 семестры) и «Теория оптимального управления» (7 семестр) как единый цикл дисциплин, посвященных основам математической теории оптимизации и управления. Отмечу при этом, что именно таким образом, как единая теория оптимизации и управления, рассматривается данная область математики в тех фундаментальных изданиях, которые приведены мною в списках литературы.

Основное содержание указанных учебных курсов можно описать следующим образом.

В курс «Математические методы и модели исследования операций» включаются, прежде всего, вспомогательные понятия и результаты из теории функций и функционального анализа, необходимые для изложения основных результатов теории оптимизации. Основную часть из них составляют основы теории дифференцируемости в функциональных пространствах. Далее, в этот курс входят основы теории экстремальных задач. В данном разделе для различных видов экстремальных задач формулируются и частично доказываются теоремы о необходимых условиях экстремума, а также излагаются общие алгоритмы исследования этих задач, нахождения допустимых экстремалей и решений.

Кроме этого, в курс «Математические методы и модели исследования операций» включаются разделы, посвященные теории вариационного исчисления. Заметим, что излагаются результаты как классического вариационного исчисления для задач с одним параметром оптимизации, так и современные результаты теории вариационного исчисления для задач с двумя параметрами оптимизации, которые непосредственно связаны с теорией оптимального управления.

В курс «Теория оптимального управления» включаются фундаментальные результаты по двум основным направлениям современной теории оптимального управления. Первое из них составляют теоретические утверждения и методы исследования, в основе которых находится принцип максимума Понтрягина. Второе направление содержит подробное изложение метода динамического программирования, основанного на принципе оптимальности Беллмана. При этом значительное внимание уделяется алгоритмическому содержанию теоретических результатов и изложению методов аналитического и численного исследования соответствующих задач оптимального управления.

Разрабатывая программы учебных курсов «Математические методы и модели исследования операций» и «Теория оптимального управления», я стремился к тому, чтобы изложить в них основы, которые составляют важную фундаментальную часть исследования операций. По объективным причинам эти учебные дисциплины являются сложными для изучения и восприятия. Однако я убежден, что они доступны, хотя и в разной степени, каждому студенту, обучающемуся по специальности «Математические методы в экономике», при условии, что он готов серьезно работать со сложными математическими проблемами.

П.В. Шнурков

1.2. Общая методическая характеристика дисциплины.

Цели и задачи дисциплины.

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний по теории решения экстремальных задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о современных математических методах оптимизации, используемых при анализе экономических и технических систем.

1. Требования к уровню освоения содержания дисциплины.

(требования к знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины).

1) знание основных понятий, определений и теоретических результатов функционального анализа в объеме первого и второго разделов курса «Математические методы и модели исследования операций»;

2) знание основных результатов теории экстремальных задач в произвольных нормированных (банаховых) пространствах, изложенных в третьем разделе курса «Математические методы и модели исследования операций»;

3)знание необходимых условий экстремума в различных задачах классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления (ОУ), приведенных в соответствующих разделах курса «Теория оптимального управления»;

4) умение применять полученные знания для решения конкретных экстремальных задач КВИ и ОУ;

5) умение использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления теоретических результатов, приведенных в настоящем курсе;

6) умение использовать учебные пособия для дополнительного изучения методики решения различных видов экстремальных задач КВИ и ОУ;

7) навыки самостоятельного теоретического анализа различных видов экстремальных задач КВИ и ОУ, приобретаемые в ходе выполнения контрольных работ и домашних заданий.

8) навыки самостоятельного исследования прикладных задач теории оптимального управления с использованием современных персональных ЭВМ.

Учебно-тематический план дисциплины

Объем дисциплины и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		7	8
Общая трудоемкость дисциплины	215	105	110
Аудиторные занятия	82	34	48
Лекции(Л)	50	34	16
Практические занятия(ПЗ)			
Семинары(С)	16	0	16
Лабораторные работы(ЛР)	16	0	16
И (или) другие виды аудиторных занятий			
Самостоятельная работа	133	71	62
Курсовой проект(работа)			
Расчетно-графические работы			
Реферат			
И (или) другие виды самостоятельной работы			
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		зачет	экзамен

(В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей графе указываются номера семестров, в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине).

2.1. Разделы дисциплины и виды занятий

(допускается название п.2.1. «Тематический план»)

		Аудиторные занятия		
№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции	ПЗ(или С)	ЛР
1	Математическое описание проблемы оптимального управления.	2 час.	-	-
2	Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию.	8 час.	-	-
3	Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория.	6 час.	-	-
4	Принцип максимума Понтрягина. Общая теория.	8 час.	-	-
5	Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач.	10 час.	-	-
6	Принцип оптимальности Беллмана. Дополнительные главы.	4 час.	2 час.	16 час.
7	Принцип максимума Понтрягина. Дополнительные главы.	12 час.	14 час.	-

(В таблице названия разделов указываются в соответствие с обязательным минимумом содержания, изложенным в ГОС ВПО. В графах, означающих предусмотренные виды занятий проставляется «*»)

2.2. Содержание разделов дисциплины

<u>Раздел 1. Математическое описание проблемы оптимального управления.</u>

Постановка задачи оптимального управления (ОУ) как экстремальной задачи с ограничениями

Основные особенности задачи ОУ, порожденные объективными причинами. Общая постановка задачи ОУ с непрерывным временем. Общая постановка задачи ОУ с дискретным временем.

<u>Раздел 2. Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию.</u>

Принцип оптимальности Беллмана. Общая формулировка, принадлежащая автору. Различные варианты формулировок принципа оптимальности.

Метод динамического программирования как общий метод решения задач оптимизации. Основное содержание метода.

Задача оптимального распределения ресурсов (классическая экономическая проблема). Решение задачи на основе метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и ее особенности.

Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Задача оптимального распределения с двумя видами ресурсов. Математическая постановка задачи. Уравнение Беллмана.

<u>Раздел 3. Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория.</u>

Задача оптимального управления с дискретным временем. Математическая постановка задачи. Решение задачи ОУ с дискретным временем методом динамического программирования.

Основная теорема для задачи ОУ с дискретным временем: выполнение уравнений Беллмана и достаточные условия оптимальности.

. Алгоритм решения задачи ОУ с дискретным временем и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задач.

Задача оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервалов времени $[t_0, t_1]$, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Рассмотрение семейства задач ОУ, зависящих от начального момента времени $\tau \in [t_0, t_1]$ и начального состояния (начала траектории) $x(\tau) = x$.Функция Беллмана.

Особенности уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем.

<u>Раздел 4. Принцип максимума Понтрягина. Общая теория.</u>

Значение принципа максимума в теории оптимального управления. История создания и развития теории ОУ, основанной на принципе максимума.

Основная постановка задачи ОУ: задача с интегральным или смешанным интегрально-терминальным функционалом, дифференциальной связью, граничными условиями и ограничением на управление.

Принцип максимума в форме Гамильтона. Принцип максимума в форме Лагранжа. Значение двух форм принципа максимума. Эквивалентность двух формулировок принципа максимума. Связь принципа максимума и общего принципа Лагранжа.

Общая система соотношений, используемых для решения рассматриваемой задачи ОУ, состоящая из необходимых условий, входящих в принцип максимума, и ограничений исходной задачи.
Алгоритмическое описание последовательности действий при исследовании общей системы соотношений с целью определения неизвестных параметров.

<u>Раздел 5. Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач.</u>

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Особенности необходимых условий экстремума, связанные со структурой задачи.
Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума.
Составление и анализ общей системы соотношений для определения неизвестных параметров в рассматриваемой задаче ОУ, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.
Задача ОУ с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых смешанными интегрально-терминальными функционалами (обобщенная задача ОУ).
Анализ полученной системы необходимых условий.
Принцип максимума, как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.
Постановка классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Понятие функции Кротова. Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме условий на функции Кротова
Принцип максимума и результаты теории КВИ.
Общая теоретическая идея о связи необходимых условий в задачах ОУ (условия, входящие в принцип максимума) и необходимых условий в задачах КВИ.

<u>Раздел 6. Принцип оптимальности Беллмана. Дополнительные главы.</u>

Задачи оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования. Доказательство основных результатов.
Анализ уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем. Уравнение Беллмана как дифференциальное уравнение с частными производными и наличием операции взятия экстремума.

<u>Раздел 7. Принцип максимума Понтрягина. Дополнительные главы.</u>

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, фиксированным левым и свободным правым концами траектории.
Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума Доказательство основной теоремы. Метод игольчатых вариаций Вейерштрасса (описание метода и его использование).
Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.
Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.
Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.
Условия выпуклости и вогнутости функции нескольких вещественных переменных.
Представление простейшей задачи КВИ в виде задачи ОУ. Уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса как следствия из условий в форме принципа максимума.
Принцип максимума в задачах ОУ с дискретным временем. Постановка задачи ОУ с дискретным временем при наличии дополнительных фазовых ограничений. Условия

гладкости и выпуклости отображений, входящих в определение исходной задачи.

Понедельный план проведения лекционных и практических занятий.

План лекционных занятий.

<u>Раздел 1. Математическое описание проблемы оптимального управления.</u>

Лекция 1. Постановка задачи оптимального управления (ОУ) как экстремальной задачи с ограничениями, определенной на множествах функций $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)$, $u(t) = u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, где $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)$ описывает состояние системы (фазовые переменные), $u(t) = u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, описывает управление системой (управляющие переменные), $t \in [t_0, t_1]$ –параметр времени.

Основные особенности задачи ОУ, порожденные объективными причинами. Аналитические свойства функций состояний (траекторий) $x(t), t \in [t_0, t_1]$ и управлений $u(t), t \in [t_0, t_1]$.

Общая постановка задачи ОУ с непрерывным временем. Составные части задачи (целевой функционал и ограничения).

Общая постановка задачи ОУ с дискретным временим. Составные части задачи (целевой функционал и ограничения).

<u>Раздел 2. Принцип оптимальности Беллмана. Введение в теорию.</u>

Лекция 2. Принцип оптимальности Беллмана. Общая формулировка, принадлежащая автору. Различные варианты формулировок принципа оптимальности. Теоретическое значение принципа оптимальности.

Метод динамического программирования как общий метод решения задач оптимизации. Основное содержание метода. Пять основных этапов реализации метода динамического программирования и их общая характеристика.

Лекция 3. Задача оптимального распределения ресурсов (классическая экономическая проблема). Математическая постановка задачи и её экономическое содержание. Решение задачи на основе метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и её особенности. Уравнение Беллмана как основное теоретическое соотношение. Два способа вывода уравнение Беллмана: качественный вывод на основе принципа Беллмана и аналитический вывод на основе свойств экстремумов функций.

Лекция 4. Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи.

Первый этап реализации алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап реализации алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления – объемов распределяемых ресурсов.

Лекция 5. Доказательство оптимальности решения задачи оптимального распределения ресурсов, полученного методом динамического программирования.

Задача оптимального распределения с двумя видами ресурсов. Математическая постановка задачи. Уравнение Беллмана. Краткое описание алгоритма решения задачи на основе метода динамического программирования (по аналогии с алгоритмом решения задачи с одним ресурсом, изложенным в лекции 4).

Методические замечания по выполнению домашней работы «Исследование задачи оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования».

<u>Раздел 3. Принцип оптимальности Беллмана. Основная теория.</u>

Лекция 6. Задача оптимального управления с дискретным временем. Математическая постановка задачи. Решение задачи ОУ с дискретным временем:

выполнение уравнений Беллмана и достаточные условия оптимальности. Доказательство теоремы для двух вариантов задачи: при наличии терминального члена в целевом функционале и при отсутствии терминального члена.

Принципиальная идея, связанная с применением метода динамического программирования: если некоторый управляемый процесс удовлетворяет уравнениям Беллмана и ограничениям исходной задачи, то он является оптимальным.

Лекция 7. Алгоритм решения задачи ОУ с дискретным временем и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи.

Дискретизация задачи (переход к дискретным множествам состояний и управлений).

Первый этап реализации алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап реализации алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления.

Оптимальность решения задачи ОУ с дискретным временем, полученного при реализации данного алгоритма.

Лекция 8. Задача оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени $[t_0, t_1]$, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Рассмотрение семейства задач ОУ, зависящих от начального момента времени $\tau \in [t_0, t_1]$ и начального состояния (начала траектории) $x(\tau) = x$. Функция Беллмана. Вывод уравнения Беллмана, основанный на принципе оптимальности.

Особенности уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем. Уравнение Беллмана как уравнение с частными производными и наличием операции взятия экстремума.

<u>Раздел 4. Принцип максимума Понтрягина. Общая теория.</u>

Лекция 9. Значение принципа максимума в теории оптимального управления. История создания и развития теории ОУ, основанной на принципе максимума.

Основная постановка задачи ОУ: задача с интегральным или смешанным интегрально-терминальным функционалом, дифференциальной связью, граничными условиями и ограничением на управление. Границы временного интервала $[t_0, t_1]$ могут быть переменными.

Две основные формы принципа максимума – гамильтонова и лагранжева.

Принцип максимума в форме Гамильтона. Вспомогательные функции: функция Понтрягина и гамильтониан. Формулировка теоремы 1 о необходимых условиях оптимальности.

Принцип максимума в форме Лагранжа. Вспомогательные функции: лагранжиан и функция Лагранжа. Формулировка теоремы 2 о необходимых условиях оптимальности.

Лекция 10. Значение двух форм принципа максимума. Эквивалентность двух формулировок принципа максимума (доказательство утверждения об эквивалентности для трех основных соотношений, входящих в принцип максимума).

Лекция 11. Связь принципа максимума и общего принципа Лагранжа.

Формулировка принципа Лагранжа. Усиленная форма принципа Лагранжа. Обоснование утверждения, состоящего в том, что при выполнении принципа Лагранжа в усиленной форме выполняются основные соотношения, входящие в принцип максимума.

Основной вывод: принцип максимума является реализацией общего принципа Лагранжа для рассматриваемого вида задач ОУ.

Лекция 12. Развернутая (координатная) форма соотношений, входящих в принцип максимума. Общая система соотношений, используемых для решения рассматриваемой задачи ОУ, состоящая из необходимых условий, входящих в принцип максимума, и ограничений исходной задачи.

Алгоритмическое описание последовательности действий при исследовании общей системы соотношений с целью определения неизвестных параметров. Алгоритмический смысл необходимых условий в форме принципа максимума: соответствие числа и характера неизвестных параметров числу и характеру соотношений, входящих в сформированную общую систему.

Раздел 5. Принцип максимума Понтрягина. Решение специальных задач.

Лекция 13. Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Особенности необходимых условий экстремума, связанные со структурой задачи.

Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума в форме принципа максимума. Необходимые условия экстремума для рассматриваемой задачи: сопряженное уравнение, условие трансверсальности в правом конце интервала времени, условие максимума функции Понтрягина.

Особенности множителей Лагранжа в задаче: $\lambda_0 = 1,$ единственный множитель Лагранжа – сопряженный параметр $p = p(t).$

Составление и анализ общей системы соотношений для определения неизвестных параметров в рассматриваемой задаче ОУ, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи.

Лекция 14. Задача ОУ с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых смешанными интегрально-терминальными функционалами (обобщенная задача ОУ). Вспомогательные функции в обобщенной задаче ОУ. Формулировка необходимых условий экстремума в форме принципа максимума в обобщенной задаче ОУ. Анализ полученной системы необходимых условий.

Лекция 15. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ. Постановка классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым концом и свободным правым концами траектории. Понятие функции Кротова. Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме условий на функции Кротова (без доказательства).

Условия выпуклости и вогнутости функции нескольких вещественных переменных.

Теорема об оптимальности процесса, удовлетворяющего условиям принципа максимума, для специального вида задач ОУ линейно-выпуклого характера.

Лекция 16. Принцип максимума и результаты теории КВИ.

Общая теоретическая идея о связи необходимых условий в задачах ОУ (условия, входящие в принцип максимума) и необходимых условий в задачах КВИ. Аналитическое исследование на примере простейшей задачи КВИ.

Представление простейшей задачи КВИ в виде задачи оптимального управления. Вывод уравнения Эйлера и условия Вейерштрасса из необходимых условий в форме принципа максимума (сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина).

Лекция 17. Связь принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана.

Общие замечания о связи двух фундаментальных принципов современной теории ОУ. Некоторые аналитические выводы, иллюстрирующие указанную связь.

Важнейшие особенности каждого из двух фундаментальных принципов теории ОУ. Области применимости этих принципов в различных задачах ОУ. Теоретическое и прикладное значение принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана в теории оптимального управления.

Заключительные замечания по курсу.

8 семестр.

<u>Раздел 6. Принцип оптимальности Беллмана. Дополнительные главы.</u>

Лекция 1. Задачи оптимального управления с непрерывным временем. Метод динамического программирования. Доказательство основных результатов.

Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени $[t_0, t_1]$, закрепленным левым и свободным правыми концами траектории.

Рассмотрение семейства задач ОУ, зависящих от начального момента времени $\tau \in [t_0, t_1]$ и начального состояния (начала траектории) $x(\tau) = x$. Определение функции Беллмана. Доказательство теоремы о справедливости уравнения Беллмана.

Лекция 2. Анализ уравнения Беллмана в задачах с непрерывным временем. Уравнение Беллмана как дифференциальное уравнение с частными производными и наличием операции взятия экстремума.

<u>Раздел 7. Принцип максимума Понтрягина. Дополнительные главы.</u>

Лекция 3. Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, фиксированным левым и свободным правым концами траектории.

Формулировка основной теоремы о необходимых условиях экстремума Доказательство основной теоремы. Метод игольчатых вариаций Вейерштрасса (описание метода и его использование).

Лекция 4. Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Завершение доказательства основной теоремы.

Лекция 5. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.

Постановка классической задачи ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Понятие функции Кротова. Общая теорема о достаточных условиях оптимальности в форме условий на функции Кротова (без доказательства).

Лекция 6. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности в некоторых специальных задачах ОУ.

Условия выпуклости и вогнутости функции нескольких вещественных переменных.

Теорема об оптимальности процесса, удовлетворяющего условиям принципа максимума, для специального вида задач ОУ линейно-выпуклого характера (формулировка и доказательство теоремы).

Лекция 7. Принцип максимума и результаты теории КВИ.

Представление простейшей задачи КВИ в виде задачи ОУ. Уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса как следствия из условий в форме принципа максимума.

Вывод канонических уравнений Гамильтона-Якоби из соотношений, входящих в формулировку принципа максимума (сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина).

Лекция 8. Принцип максимума в задачах ОУ с дискретным временем. Постановка задачи ОУ с дискретным временем при наличии дополнительных фазовых ограничений. Условия гладкости и выпуклости отображений, входящих в определение исходной задачи.

Теорема о необходимых условиях экстремума в гладко-выпуклой задаче с дискретным временем (принцип максимума). Формулировка и доказательство основной теоремы.

Общее замечания об особенности применения принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана в задачах ОУ с дискретным временем.

План семинарских занятий.

7 семестр. Не планируются.

8 семестр.

Занятие 1. Принцип максимума Понтрягина (краткое изложение теории).

Постановка задачи оптимального управления (основная постановка).

Введение дополнительных функций: функции Понтрягина и гамильтониан. Теорема о необходимых условиях экстремума (принцип максимума в форме Гамильтона).

Классическая задача оптимального управления с фиксированными концами интервала времени $[t_0,t_1]$, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Теорема о необходимых условиях экстремума (классическая форма принципа максимума).

Занятие 2. Задача об оптимальном быстродействии (часть 1).

Описание физической модели системы (движущаяся управляемая материальная точка). Физические законы описания системы.

Математическая постановка задачи оптимального управления.

$$I(x(\cdot),u(\cdot)) = T = \int_0^T dt \to \inf \qquad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} = a_0 \qquad (3)$$

$$x(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R : |u| \le 1\} \qquad (5)$$

Необходимые условия экстремума: сопряженное уравнение, условие максимума функции Понтрягина. Общая структура оптимальных уравнений $u_*(t)$. Общий вид фазовых траекторий при управлении, удовлетворяющих условиям принципа максимума.

Занятие 3. Задача об оптимальном быстродействии (часть 2).

Аналитическое исследование траекторий управляемого процесса. Определение неизвестных параметров оптимального процесса в зависимости от начальных условий.

Доказательство оптимальности управляемого процесса $\{x_*(t), u_*(t), T_*\}$, удовлетворяющего условиям принципа максимума в задаче об оптимальном быстродействии. Метод доказательства: использование вспомогательной функции [illegible].

Занятие 4. Задача об оптимальном быстродействии (часть 3).

Анализ задачи об оптимальном быстродействии методом динамического программирования.

Уравнение Беллмана в задаче об оптимальном быстродействии.

Определение явного представления для функции Беллмана в задаче об оптимальном быстродействии на основе полученных ранее результатов.

Непосредственная проверка того, что найденная функция Беллмана является решением уравнения Беллмана .

Исследование аналитических свойств функции Беллмана. Проверка того, что функция Беллмана не является непрерывно дифференцируемой при всех значениях аргумента $x=(x_1,x_2)$.

Заключительные замечания и выводы.

Занятие 5.

Рассматривается экстремальная задача.

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 x(t)\,dt\to extr \qquad (1)$$

$$|\ddot{x}|\le 2 \qquad (2)$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0 \qquad (3)$$

Приведение задачи (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ.

Введение новых параметров: $x_1=x,\ x_2=\dot{x},\ \dot{x}_2=\ddot{x}=u$.

Исследование полученной задачи на минимум.

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 x_1(t)\,dt\to extr \qquad (4)$$

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u \qquad (5)$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0 \qquad (6)$$

$$|u(t)|\le 2,\ t\in[0,1] \qquad (7)$$

Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума. Анализ необходимых условий.

$x_*(t)=-t^2,\ u_*(t)=-2,\ t\in[0,1]$ (8) - единственная допустимая экстремаль.

Доказательство оптимальности процесса (8) методом непосредственной проверки.

Занятие 6. Исследование задачи оптимального управления, сформулированной на занятии 5, на максимум.

Постановка экстремальной задачи.

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 [-x_1(t)]\,dt\to extr \qquad (1)$$

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u \qquad (2)$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0 \qquad (3)$$

$$|u(t)|\le 2,\ t\in[0,1] \qquad (4)$$

Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума. Анализ необходимых условий.

$x_*(t)=t^2,\ u_*(t)=2,\ t\in[0,1]$ (5) - единственная допустимая экстремаль.

Доказательство оптимальности процесса (5) проводится методом непосредственной проверки.

Занятие 7.

Рассматривается экстремальная задача.

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^4 [\dot{x}^2(t)+x(t)]\,dt\to extr \qquad (1)$$

$$|\ddot{x}|\le 1 \qquad (2)$$

$$x(4)=0 \qquad (3)$$

Введем параметр управления $u(t)=\dot{x}(t)$ и приведем задачу (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ:

Задача оптимального управления имеет вид:

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^4 [u^2(t)+x(t)]dt\to extr \quad (4)$$

$$\dot{x}=u \quad (5)$$

$$x(4)=0 \quad (6)$$

$$|u(t)|\le 1,\ t\in[0,4] \quad (7)$$

Используем необходимые условия экстремума в форме принципа максимума.

При исследовании получаем

[illegible]

(8) - единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки устанавливается, что пара функций $(x_*(t),u_*(t)),\ t\in[0,4]$, задаваемых соотношением (8) является решением задачи.

При исследовании задачи (4)-(8) на максимум получаем

$x_*(t)=4-t,\ u_*(t)=-1,\ t\in[0,4]$ (9) - единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки получаем, что пара функций $(x_*(t),u_*(t)),\ t\in[0,4]$, задаваемых соотношением (9) является решением задачи.

Занятие 8.

Рассматривается экстремальная задача.

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\frac{7\pi}{4}} x(t)\sin t\,dt\to extr \quad (1)$$

$$|\dot{x}|\le 1 \quad (2)$$

$$x(0)=0 \quad (3)$$

Введем параметр управления $u(t)=\dot{x}(t)$ и приведем задачу (1)-(3) к каноническому виду задачи ОУ:

Задача оптимального управления имеет вид:

$$I(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^{\frac{7\pi}{4}} x(t)\sin t\,dt\to extr \quad (4)$$

$$\dot{x}=u \quad (5)$$

$$x(0)=0 \quad (6)$$

$$|u(t)|\le 1,\ t\in[0,\frac{7\pi}{4}] \quad (7)$$

Исследуем задачу (4)-(7) на минимум. Используем необходимые условия экстремума в форме принципа максимума.

$$x_*(t)=\begin{cases} -t,\ t\in[0,\frac{\pi}{4}), \\ t-\frac{\pi}{2},\ t\in[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}] \end{cases} \quad (8)$$

$$u_*(t)=\begin{cases} -1,\ t\in[0,\frac{\pi}{4}), \\ 1,\ t\in[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}] \end{cases} \quad (9)$$

- единственная допустимая экстремаль.

Методом непосредственной проверки получаем, что пара функций $(x_*(t),u_*(t))$, задаваемая формулами (8), (9) является решением задачи (4)-(7) на минимум.

Подведение итогов за семестр. Завершение занятий.

План проведения лабораторных занятий.

<u>8 семестр.</u>

<u>Занятие 1.</u>

Теоретические сведения. Принцип оптимальности Беллмана. Общее описание метода динамического программирования.

Задача оптимального управления с дискретным временем. Математическая постановка задачи. Теорема об оптимальном управлении: выполнение уравнений Беллмана и достаточные условия оптимальности (формулировка теоремы). Использование теоремы об оптимальном управлении.

Задача оптимального распределения ресурсов как классическая проблема математической экономики. Математическая постановка задачи и ее экономическое содержание. Решение задачи при помощи метода динамического программирования.

Определение (формальное) функции Беллмана данной задачи и ее особенности как математического объекта. Уравнение Беллмана как основное теоретическое соотношение. Два способа вывода уравнений Беллмана: качественный вывод на основе принципа Беллмана и аналитический вывод на основе свойств экстремумов функций.

<u>Занятие 2.</u>

Теоретические сведения. Алгоритм решения задачи оптимального распределения ресурсов и его численная реализация.

Система функциональных уравнений Беллмана как теоретическая основа алгоритма решения задачи. Дискретизация задачи и формирование дискретных аналогов уравнений Беллмана.

Первый этап алгоритма (подготовительный). Создание вспомогательных массивов данных значений функции Беллмана и значений параметров управления, на которых достигается равенство в уравнениях Беллмана.

Второй этап алгоритма (завершающий). Определение оптимальных значений параметров управления – объемов распределяемых ресурсов – в каждый дискретный момент времени в зависимости от состояния процесса.

<u>Занятие 3.</u>

Теоретические сведения. Задача оптимального распределения двух видов ресурсов. Математическая постановка задачи и ее экономическое содержание. Уравнения Беллмана.

Дискретизация задачи и дискретный аналог общих уравнений Беллмана. Описание алгоритма решения аналогично алгоритму соответствующей задачи с одним видом ресурса. Особенности решения задачи с двумя видами ресурсов.

<u>Занятие 4.</u>

Методические указания по выполнению лабораторной работы на тему «Решение задачи оптимального распределения ресурсов методом динамического программирования».

Последовательность выполнения лабораторной работы. Программные продукты и средства, используемые при численной реализации алгоритмов, а также для создания графических иллюстраций.

Оформление отчета по данной лабораторной работе. Критерии оценки выполнения работы и сдачи зачета.

Подготовка теоретических материалов для отчета по данной лабораторной работе.

Занятие 5.

Подготовка вспомогательных материалов и средств для реализации общего алгоритма оптимального распределения ресурсов.

Разработка и реализация на компьютере вспомогательных алгоритмов и подпрограмм, необходимых для реализации общего (основного) алгоритма решения задачи:

1) Алгоритм нахождения максимального значения заданного числового массива
2) Алгоритм перебора значений аргументов в функции Беллмана
3) Алгоритм перебора номеров (целочисленных параметров) функций Беллмана

Подготовка и формирование таблиц, содержащих массивы вспомогательных данных.

Занятие 6.

Формирование и реализация общего алгоритма решения задачи оптимального распределения ресурсов.

Разработка и реализация алгоритма поиска оптимального распределения ресурсов по сформированным таблицам вспомогательных данных.

Сведение разработанных частичных алгоритмов и соответствующих программных средств в единый программный продукт. Завершение формирования программы реализации алгоритма оптимального распределения ресурсов.

Занятие 7.

Завершающая отладка программного продукта, предназначенного для реализации алгоритма оптимального распределения ресурсов.

Тестирование разработанной программы. Проверка надежности ее работы при помощи сравнения получаемых результатов с известными результатами расчетов по специальному контрольному варианту (так называемый вариант 0).

Проведение численных расчетов по заданному варианту. Формирование окончательных результатов по реализации алгоритма решения задачи оптимального распределения ресурсов.

Занятие 8.

Подготовка графических и иллюстративных материалов, связанных с решением задачи оптимального распределения ресурсов.

Графики, иллюстрирующие поведение функций, выражающих эффективность вложенных ресурсов. Графики, иллюстрирующие поведение функций Беллмана. Диаграммы, иллюстрирующие оптимальное распределение ресурсов. Другие иллюстративные материалы.

Завершение оформления на компьютере отчета о выполнении данной лабораторной работы.

2.3. Список основной и рекомендуемой литературы.

Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1) Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2) Галлеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.
3) Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
4) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

б) дополнительная литература:

1) Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2) Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998.
3) Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
4) Беллман. Р., Гликберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
5) Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
6) Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
7) Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1999.
8) Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1989.
9) Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.
10) Основы теории оптимального управления. Под редакцией В.Ф. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990.
11) Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.